MATEMÁTICA

Prof. Ariana Dalvelo
Lic. Eugenia Artola
Prof. Silvina Ejea
Lic. Florencia Aspera

INTRODUCCIÓN

La Matemática aparece como una de las principales claves para la comprensión del mundo en que vivimos; de ahí su valor en la cultura, en la sociedad, en la historia y sobre todo en el presente. El conocimiento matemático se considera un componente fundamental para la formación integral de la persona, por las capacidades y actitudes que desarrolla, por las proyecciones que tiene en la vida, como también así en la adquisición del hábito natural de dirigir el pensamiento y adoptar decisiones en la resolución de problemas.

La problemática del diseño es una de las actividades que no ha escapado a la influencia de esta ciencia, y sus métodos y técnicas constituyen procedimientos valiosos a la hora de proyectar. En esta carrera se amplía el conocimiento matemático desde la matemática pura y desde la matemática aplicada a otras ciencias; sin embargo, debe quedar claro que ese conocimiento, a pesar de su aspecto diferente, forma un todo indisoluble que se expande por los dos extremos: por el lado puro, facilitando nuevas aplicaciones y por el lado aplicable, descubriendo nuevos problemas que sirven de estímulo para la matemática pura.

El programa que se desarrolla provee las herramientas matemáticas aplicables a la metodología del proceso de diseño, tanto en su etapa de análisis como en su etapa proyectual, de este modo contribuye a exteriorizar aspectos que conducen a la solución formal. Además, a través de esta preparación se puede entender, programar y guiar el proceso de diseño, apoyado por una estructura científica que nos permite usar relaciones, ordenes, niveles y estrategias en cada una de las etapas que conforman la actividad de “proyectar”.

Comenzaremos ampliando el lenguaje matemático, introduciendo algunas nociones de **Lógica Matemática**:

- **Proposición**

Es un enunciado o expresión lingüística, del cual puede establecerse un valor de verdad, es decir se puede determinar si es verdadero (V) o falso (F). No son proposiciones aquellas que expresan deseo, orden, interrogación o exclamación. Se suelen simbolizar con letras imprenta minúsculas p, q, r, s, etc. Ejemplos de proposiciones:

p: Juan estudia diseño
q: si 3 = 2+1 entonces 4 = 2+2

1 **Marca con una cruz las oraciones que sean proposiciones:**

- [ ] *a) En todo triángulo la suma de la medida de sus ángulos interiores es igual a 180°.*
- [ ] *b) 3-5 = 12+8*
- [ ] *c) ¡Qué lindo diseño!*
- [ ] *d) Un pentágono no es un polígono.*
- [ ] *e) ¿Cuál es tu dirección?*
- [ ] *f) x+3=4*
- [ ] *g) Apaga la luz.*

- **Negación de una proposición**

Dada una proposición p, siempre es posible determinar otra proposición negándola, se simboliza –p y se lee "no p". Si p es una proposición verdadera su negación será falsa.

p	**-p**
V	F
F	V

En las tablas de verdad se pueden visualizar todos los posibles valores de verdad de una proposición.

- **Conectivos lógicos**

A través del uso de conectivos lógicos se obtienen proposiciones compuestas. En este curso estudiaremos los siguientes conectivos lógicos: conjunción, disyunción, implicación simple o condicional y doble implicación o bicondicional.

Conjunción

Dadas dos proposiciones p y q cualesquiera, la conjunción de dos proposiciones es otra proposición anotada p $\wedge$ q, y es verdadera sólo cuando ambas son verdaderas. Se lee p y q.

p	$\wedge$	**q**
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	F	F

Disyunción

La disyunción de dos proposiciones es otra proposición anotada p $\vee$ q, y será falsa solo cuando ambas son falsas. Se lee p ó q.

p	$\vee$	**q**
V	V	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

Implicación simple o condicional
La implicación de proposiciones es otra proposición anotada p $\Rightarrow$ q, y es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Se lee p implica q.

p	$\Rightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

En este caso la proposición p recibe el nombre de "antecedente" y la proposición q de "consecuente".

Doble implicación o bicondicional
Dadas dos proposiciones p, q se puede formar otra proposición compuesta llamada doble implicación o bicondicional, anotada p $\Leftrightarrow$ q. La doble implicación es verdadera cuando ambas proposiciones toman el mismo valor de verdad y es falsa en caso contrario. Se lee p si y solo si q.

p	$\Leftrightarrow$	q
V	V	V
V	F	F
F	F	V
F	V	F

2 **Escribe los siguientes enunciados usando proposiciones y conectivos lógicos.**

a) 4 - 6 =12 ó 3 – 5 = 16

b) $(-4+7)^3 = 4-1$ y $(-3)^0 = 1$

c) Si julio tiene 30 días entonces septiembre tiene 31 días.

d) En todo cuadrilátero la suma de la medida de sus ángulos interiores es igual a 2π, si y solo si posee 6 diagonales.

3 **Encuentra el valor de verdad para las siguientes proposiciones compuestas.**

a) $(-5)^0 = 0$ y $(-2)^0 = 1$

b) -4 es un número entero o,16 es número racional.

c) Si en un heptágono la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 220º entonces el número de sus diagonales es igual a 8.

d) Siendo $|\alpha| = 34º$, la medida de su complemento es igual a 90 º - $|\alpha|$ si y solo si la medida de su suplemento es de 138º.

e) En un dodecágono la suma de las medidas de los ángulos interiores es igual a 1030º si y solo si el número de vértices es igual a 25.

f) Si un hexágono tiene 6 vértices y 20 diagonales, entonces no tiene 6 lados.

4 **Siendo p una proposición verdadera, q falsa y r verdadera, cuál es el valor de verdad para la proposición compuesta:**

a) $-[(p \vee -q)] \wedge (-q \Rightarrow p)$

b) $(p \vee -r) \wedge (q \vee -p)$

c) $(r \Rightarrow -q) \vee (p \Leftrightarrow -r)$

5 **Construyendo las tablas de verdad, indica si es una tautología, contradicción o contingencia, siendo p, q y r proposiciones cualesquiera.**

a) $-(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$

b) $[(-p \vee q) \wedge (-q \vee -p)] \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q)$

c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-q \Rightarrow -p)$

d) $(-p \Rightarrow -q) \Leftrightarrow [(q \vee r) \wedge p]$

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow -p)$

f) $(p \vee r) \Leftrightarrow [(-p \vee q) \Rightarrow r]$

Se obtiene una TAUTOLOGÍA, cuando todos los valores de verdad obtenidos son verdaderos. Cuando todos los valores de verdad obtenidos son falsos, se llama CONTRADICCIÓN, y cuando en la tabla se obtienen valores verdaderos y falsos se denomina CONTINGENCIA.

Propiedades:

- La implicación simple es equivalente a la disyunción del antecedente negado, con el consecuente, es decir:

  $$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (-p \vee q)$$

- La doble implicación de dos proposiciones p, q, es equivalente a la conjunción de dos implicaciones simples en las cuales se intercambian el antecedente y el consecuente respectivamente:

  $$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

6 **Construye las tablas de verdad para demostrar que las propiedades anteriores son tautologías.**

- **Leyes y principios lógicos**

Involución: la negación de una proposición negada es equivalente a la proposición.

$-(-p) \Leftrightarrow p$

Idempotencia: la conjunción, o la disyunción, de una proposición consigo misma es equivalente a dicha proposición.

$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$

Conmutativa: si se cambia el orden de las proposiciones en conjunción, o en disyunción se obtiene una proposición equivalente.

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$

Identidad: la disyunción de una proposición y una falsedad es equivalente a dicha proposición. La conjunción de una proposición y una verdad es equivalente a dicha proposición.

$(p \vee F) \Leftrightarrow p$
$(p \vee V) \Leftrightarrow V$
$(p \wedge F) \Leftrightarrow F$
$(p \wedge V) \Leftrightarrow p$

Asociativa: cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

Complemento: la disyunción de una proposición y su negación es una verdad absoluta. La conjunción de una proposición y su negación es una falsedad absoluta.

$(p \vee -p) \Leftrightarrow V$
$(p \wedge -p) \Leftrightarrow F$

Distributiva: cualesquiera sean las proposiciones p, q, r, se verifican las siguientes equivalencias:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Leyes de De Morgan: la negación de una disyunción es equivalente a la conjunción de las dos proposiciones negadas.

$-(p \vee q) \Leftrightarrow (-p \wedge -q)$

La negación de una conjunción es equivalente a la disyunción de ambas proposiciones negadas.

$- (p \wedge q) \Leftrightarrow (- p \vee - q)$

7 **Aplica sucesivamente las leyes lógicas para simplificar las siguientes proposiciones lógicas:**

a) $(p \vee q) \wedge - q$

b) $(p \wedge q) \vee - p$

c) $(-q \vee p) \vee q$

d) $-(p \vee -q) \wedge - p$

- **Esquemas proposicionales**

Hay expresiones como: $x+1 = 7$, $x \geq 2$, $x^3 = 2x^2$, que contienen variables y cuyo valor lógico dependerá del valor atribuido a esas variables.
En los ejemplos citados: $x+1 = 7$ es verdadera si x es igual a 6, y falsa en cualquier otro caso; lo mismo ocurre para $x \geq 2$, que será verdadera para un conjunto de valores y falsa para otro. A estas expresiones que contienen variables se las llama funciones proposicionales o esquemas proposicionales. Los esquemas proposicionales no son proposiciones ya que su valor lógico (V ó F), depende del valor dado a las variables.

Hay dos maneras de transformar esquemas proposicionales en proposiciones:

- atribuir valor a las variables
- utilizar cuantificadores

El **cuantificador universal**, usado para transformar esquemas proposicionales en proposiciones, se indica con el símbolo $\forall$ que se lee: “para todo”.

Ejemplo:
$(\forall x)(x \in IR) : (x + 1 = 21)$, que es una proposición falsa.
$(\forall x)(x \in IR) : (x^2 \geq 0)$, que es una proposición verdadera.

El **cuantificador existencial** se indica con el símbolo $\exists$ y se lee: “existe”.

Ejemplo:
$(\exists x)(x \in IR) : (x+1 = 7)$, que es una proposición verdadera.
$(\exists x)(x \in IR) : (x^2 + 1 \leq 0)$, que es una proposición falsa.

8 **Transforme las siguientes oraciones en proposiciones verdaderas utilizando cuantificadores:**

a) $x - 4 = 15$

b) $2x - 3 \leq 12$

c) $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$

d) $2x + 5 > -4x$

Negación de esquemas proposicionales
Negar un esquema proposicional equivale a negar el cuantificador y la función proposicional respectiva. Negar un cuantificador universal equivale a obtener un cuantificador existencial y viceversa.

9 **Niegue las siguientes proposiciones cuantificadas:**

a) $(\exists x)\ (x \in IR) : (x - 4 \leq 3)$

b) $(\forall x)\ (x \in IR) : (x - 4)(x + 4) = x^2 - 16$

c) $(\exists x)\ (x \in IR) : (6x + 5 > 2)$

d) $(\forall x)\ (x \in IR) : (x + 3)^2 \neq x^2 - 9$

LENGUAJE CONJUNTISTA

Dentro del estudio del **Álgebra de Boole**, otro modelo que se considera es el de los conjuntos y la posibilidad de formar otros nuevos.
Concebimos a un **conjunto** como una colección de objetos a los que podemos definir **por extensión** cuando denominamos a cada uno de los objetos que lo constituyen (el orden no interesa), ó **por comprensión** en donde se establece una propiedad característica de los elementos del conjunto.

Ejemplo:

$A = \{x: x \in IN, -2 \leq x < 4\}$ está definido por comprensión,

$A = \{0,1, 2,3\}$ está definido por extensión.

10 **Escribe por extensión los siguientes conjuntos:**

a) $A = \{x: x \in IN, 4 \leq x < 9\}$

b) $B = \{x: x \in Z, x - 6 = -5\}$

c) $C = \{x: x \in IR, x^2 - 25 = 0\}$

11 **Sea el conjunto:**

$H = \{x: x \in IN, 20 \leq x \leq 50$, x es múltiplo de 2 pero no es múltiplo de 3$\}$.

Determina el número de elementos de H.

- **Conjuntos iguales**

Dos conjuntos A y B son iguales cuando todo elemento de A pertenece a B y recíprocamente, todo elemento de B pertenece a A.

$A = B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

- **Conjunto vacío**

El conjunto vacío es aquel que carece de elementos y se simboliza { } o así $\varnothing$**.**

- **Inclusión**

Un conjunto A está incluido en B, cuando todos los elementos de A pertenecen a B.

$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x)(x \in A \Rightarrow x \in B)$

Se dice que:

A esta incluido en B
A es parte de B
A es subconjunto de B

Propiedades de la inclusión:

Siendo A, B y C conjuntos cualesquiera, valen las siguientes propiedades:

$\varnothing \subset A$

$A \subset A$

$(A \subset B \wedge B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$

$(A \subset B \wedge B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$

12 **Siendo A= {m, p, o, t, q, r}, se puede afirmar que:**

a) $\{m, o, p\} \subset A$ b) $q \subset A$ c) $\{t\} \not\subset A$ d) $\{e, m\} \subset A$

PARTES DE UN CONJUNTO

Dado un conjunto $A \neq \varnothing$, se llama conjunto partes de A y se anota $\mathcal{P}(A)$, al conjunto formado por todos los subconjuntos de A.

$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$

Ejemplo:

Si $A = \{a\}$ entonces $\mathcal{P}(A) = \{\{a\}, \{\}\}$
Para $B = \{1, 2, 3\}$, entonces $\mathcal{P}(B) = \{\{1\}, \{2\},\{3\}, \{1,2\}\{1,3\}\},\{3,2\},\{1,2,3\},\{\}\}$

"Si A es un conjunto finito de n elementos entonces $\mathcal{P}(A)$ tiene 2^n elementos"

13 **Determina si el número de elementos del conjunto:**

$\mathcal{P}(\mathbf{A})$ es menor, mayor o igual al de $\mathcal{P}(\mathbf{B})$, siendo A= {1,2,3,4} y B= {a, b, c}

14 **Si** A = {1, 3, 5, 7} **y** B= {2, 4, 6} **coloca V ó F según corresponda:**

- ☐ *a)* $\{1,3\} \in \mathcal{P}(A)$
- ☐ *b)* $\mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \{3\}\}$
- ☐ *c)* $\mathcal{P}(B)$ *tiene 8 elementos*
- ☐ *d)* $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

- **Conjunto unión**

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto unión al conjunto que tiene por elementos a los elementos que pertenecen a A *o* a B.

$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

Propiedades

A ∪ A = A
A ∪ {} = A
A ∪ B = B ∪ A
(A∪B) ∪ C = A ∪ (B ∪C)

- **Conjunto intersección**

Dados dos conjuntos A y B, se llama conjunto intersección al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y a B.

$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B)$

Propiedades

A ∩ A = A
A ∩ {} = {}
A ∩ B = B ∩ A
(A∩ B) ∩ C= A∩ (B∩C)

Siendo A, B y C conjuntos cualesquiera, se cumplen las siguientes **propiedades relativas a la unión e intersección:**

A ∪ (A ∩B) = A
A ∩ (A ∪ B) = A
(A ∩ B) ∪ C= (A ∪ C) ∩ (B ∪ C)
(A ∪ B) ∩ C= (A ∩ C) ∪ (B ∩ C)

15 ***Siendo*** *G = {1, 2, 3, 4} **y** H = {2, 3, 4, 5}, **encuentra los conjuntos** G ∪ H y G ∩ H **por extensión.***

16 **A y B son conjuntos cualesquiera. Existen elementos de A que pertenecen al conjunto B, entonces la proposición verdadera es:**

a) A∪B = B∪A

b) B es un subconjunto de A

c) A y B son conjuntos disjuntos

d) A ∩ B = {}

17 **Se sabe que:**

$A \cup B \cup C = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 10\}$, $A \cap B = \{2,3,8\}$, $A \cap C = \{2,7\}$, $B \cap C = \{2,5,6\}$ y que $A \cup B = \{x: x \in IN, 1 \leq x \leq 8\}$,

entonces el conjunto C escrito por extensión es:

18

Siendo $A = \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$***, se puede afirmar que:***

a) $\{1\} \not\subseteq A$ *b)* $\{1\} \subset A$ *c)* $(\{2\} \cap \{1\}) \not\subset A$ *d)* $(\{1\} \cap \{2\}) \subset A$

- **Conjunto diferencia**

Se llama conjunto diferencia de A y B, al conjunto anotado A-B cuyos elementos pertenecen a A y no a B.

$A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Propiedades:

$(A - B) \cap B = \{\ \}$

$A - A = \{\ \}$

$A - \{\ \} = A$

19 **Considera los conjuntos:**

$A = \{x: x \in IR, x^2 - 16 = 0\}$ *y*

$B = \{x: x \in Z, -4 \leq x < 5\}$, **determina por extensión los conjuntos:** A-B y B-A.

20 **Sean los conjuntos:**

A= { x: x$\in$IN, x es múltiplo de 6 y menor que 18} y
B= { x: x$\in$ IN, x es divisor de 6}.

Determina por extensión:

a) $A \cap B$

b) $A - (A \cup B)$

c) $A - (B \cap A)$

d) $(B - A) \cup A$

21 **Siendo** E = {a, b, c, d, e}, A = {a, b} y B ={c, d, e},
determina el valor de verdad para las proposiciones compuestas:

a) $[(\{a, b, c\} \subset E) \Rightarrow (B \subset \{\})] \vee (d \subset B)$

b) $((A \cup B) \cap E = E) \Leftrightarrow (A \cap B \neq \{\})$

c) ({a, b} es un conjunto con un conjunto con un solo elemento) $\wedge$ ($\{a, b\} \subset B - A$)

- **Conjunto complemento**

Sea E un conjunto al cual denominaremos universal o referencial, se tienen todos los subconjuntos o partes de E que anotaremos como A, B, C,..,{ }. Dados los conjuntos A y el referencial E, se llama complemento del conjunto A, al conjunto formado por los elementos que pertenecen a E y que no pertenecen a A.

$\bar{A} = A' = C_E\, A = E - A = \{x:\ x \in E \wedge\ x \notin A\}$

22 **Siendo** E = {a, b, c, d, e, f, g}, A = {a, b, c, d} y B ={c, d, e, f, g},
determina por extensión:

a) $E - A$

b) $(B' \cup A)$

c) $(A \cap B)'$

d) $A' \cap (B' \cap A)$

23 **Encierra la respuesta correcta:**

- *La unión de los conjuntos*: [(IN ∩ Z) U Q] U [IN U (Z ∩ Q)] *es:*

a) *IR* *b) Q* *c) Z* *d) ∅*

- *Si un subconjunto X de números naturales contiene los cinco primeros múltiplos de 2, los tres primeros múltiplos de 6 y cuatro números impares, el número de elementos de X es:*

a) 14 *b) 11* *c) 12* *d) 10*

- *Siendo A y B subconjuntos de un referencial E, y los conjuntos* $\overline{A}$= *{e, f, g, h, i}, A ∩ B = {c, d}, A U B= {a, b, c, d, e, f}, entonces:*

a) A tiene 2 elementos y B tiene 4 elementos
b) A tiene 4 elementos y B tiene 4 elementos
c) A tiene 3 elementos y B tiene 4 elementos
d) A tiene 3 elementos y B tiene 3 elementos

- *Siendo A y B dos conjuntos cualesquiera es falso que:*

a) $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$
b) $A \cup B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$
c) $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$
d) $A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

Bibliografía del docente:

Iezzi, Nelson; Murakami, Carlos.” Fundamentos de Matemática elementar”, 1998.

Andrini, Álvaro, “Praticando Matemática”, Editora do Brasil, Sao Paulo. 2001

Gentile, Enzo, “Aritmética elemental en la formación matemática”, Buenos Aires. 1998.

Almeida Santos, Antonio Jorge; “1000 testes de Matemática” Ufba, Bahia, Brasil. 1999

Balbontin Bascuñan, Clara; “Matemática: Algebra 1”, Ediciones Nueva Universidad, Colección Teleduc, Santiago de Chile, 1999.